1106

~~254~~ のるむ群ニツイテノ一定理

中山　正（名大）

有限次拡大ノのるむ群ニツイテノ一定理ヲ証明シマス。ソレハ局所類体論ノ終結定理ノ代数的証明ヲ与ヘルモノデアリマス。同定理ノ証明ハ普通（例ヘバ Chevalley, Crelle 169）ハ存在定理ヲ使ッテキルノデ，例ヘバ最近宇屋氏ノ扱ッテ居ラレルヤウナ場合ニツイテハ適用出来ズ，却ッテ存在定理ニ関係スル一定理ノ証明ニ同定理ヲ必要トスルヤウナ状態（宇屋一中山，学士院近刊）デ，ソノタメ宇屋氏（学士院，18巻，452頁）ハ同定理ノ存在定理ニヨラナイ新ラシイ証明ヲ与ヘラレタ。

シカシソレハ相当面倒ナのるむ群ノ index ノ計算ヲ必要トシテキル。ソコデ以下ノ如クスレバ，証明モ幾分透明

ニナリ代数的内容モアル程度明ラカニサレルノデハナイカト思フ。ナホ高所類体論ノ多元数論的取扱ヒ（Chevalley, l.c; 中山, Annalen 112; 秋月, 同処）ノ補足トモナラウト思ヒマス。

前置キガ長クナリマシタガ，簡単ナコトデアリマス。先ヅ体$k$等ノ乗法群ヲ$k^*$等トシ，$K/k$ガ有限次拡大ノトキソノノルム群ヲ$N^*K/k$デ表ハス。マタ$\Omega/k$ガガロア拡大，$(a)=(a_{R,S})$ガソノ因子団ノトキ

$$F_{\Omega/k}(R;(a))=\prod_S a_{R,S}$$

ナル記法ヲ使フ。

<u>補題1</u>　$F_{\Omega/k}(R;(a))\in k$デアリ，

$$R\longrightarrow F_{\Omega/k}(R;(a)) \mod N^*_{\Omega/k}$$

ハ$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$（$\mathfrak{G}$ハ$\Omega/k$ノガロア群，$\mathfrak{G}'$ハソノ交換子群）カラ$k^*/N^*_{\Omega/k}$ノ中ヘノ準同型ヲ與ヘル。マタ同伴ナ因子団ハ同ジ準同型ヲ與ヘル。

<u>補題2</u>　$L$ガ$\Omega/k$ノ中間体デ$\mathfrak{H}$ガ對應スル$\mathfrak{G}$ノ部分群，$(a)_{\mathfrak{H}}$ナ因子団$(a)$ノ$\mathfrak{H}$ニ関係スル部分，トスレバ$A\in\mathfrak{H}$ニ對シテ

$$F_{\Omega/k}(A;(a))=N_{L/k}(F_{\Omega/L}(A;(a)_{\mathfrak{H}}))$$

デアル。（以上中山，l.c. 參照）

コノ両者ヨリ直チニ

<u>補題3.</u> 上ト同ジ記号ノ下ニ, $R \in \mathfrak{O}' \cdot \mathfrak{h}_y$ ナラバ

$$F_{\Omega/k}(R;(a)) \in N^*_{L/k}$$

デアル。

証明. $R = R_1 R_2$; $R_1 \in \mathfrak{O}'$, $R_2 \in \mathfrak{h}_y$ トスレバ

$$F_{\Omega/k}(R;(a)) \equiv F_{\Omega/k}(R_1;(a))\, F_{\Omega/k}(R_2;(a))$$

mod $N^*_{\Omega/k}$. 然ルニ右辺ノ第一因子ハ補題1ニヨリ $\in N^*_{\Omega/k}$, 第二因子ハ補題2ニヨリ $\in N^*_{L/k}$. 故ニ定理ガ成立ツ

<u>定理1.</u> $\Omega/k$ ガガロア拡大トシ

$$\Omega \supset K \supset L \supset k$$

$$1 \subset \mathfrak{K} \subset \mathfrak{L} \subset \mathfrak{G}$$

トスル。ソシテ $L$ ノ上ノ $\Omega$ ヲ分解体ニモツ多元環類ハ常ニ $k$ ノ上ノ適当ナ多元環類カラ係数拡大デ得ラレルト仮定スル. マタ $L^*$ ノ任意ノ元 $\alpha$ ハ $\Omega/L$ ノ適当ナ有限個ノ因子團 $(\alpha)_i$, $\mathfrak{L}$ ノ適当ナ元 $A_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots,n$) ニヨリ

$$\alpha \equiv \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/L}(A_i;(\alpha)_i) \mod N^*_{\Omega/L}$$

ト書ケルトスル。

コノトキ更ニ $L$ ガ $K/k$ ノ最大アーベル体ヲ含ム

事求ムベ

$$N^*_{K/k} = N^*_{L/k}$$

デアル。即チ $k$ ノ元デ $L/k$ ノのるむナルモノハ常ニ $K/k$ ノのるむデモアル。

(証明) $c \in N^*_{L/k}$ トスル。即チ $\gamma \in L$ ガアッテ

$c = N_{L/k}(\gamma)$

然ルニ仮定ニヨリ

$$\gamma = \prod_i F_{\Omega/L}(A_i\,;\,(\alpha)_i)$$

ト書ケル(≡ヨリ＝ヘノ移行ハ同伴ナ因子團ヲトレバヨイ) 更ニ仮定ニヨリ

$$((\alpha)_i, \Omega, \mathfrak{L}) \sim ((a)_i, \Omega, \mathfrak{g})_L$$

ナル $\Omega/k$ ノ因子團 $(a)_i$ ガアル. ヨッテ補題2ニヨリ

$$c = N_{L/k}(\gamma) = \prod_i N_{L/k}(F_{\Omega/L}(A_i\,;\,(\alpha)_i))$$
$$\equiv \prod_i F_{\Omega/k}(A_i\,;\,(a)_i) \mod N^*_{\Omega/k}$$

然ルニ $A_i \in \mathfrak{L} \in \mathfrak{g}' \cdot \mathfrak{K}$ ダカラ補題3ニヨリ此レハ $\in N^*_{K/k}$.

故ニ $c \in N^*_{K/k}$ デアル。(証了)

(單ニ局所類体論(守屋氏ノ一般化サレタ場合ヲ含メテ)ニ使フノナラ上ノ定理ダケデモヨイ。先ガがろ

あ体ノのるむ群が最大あーべる体ノのるむ群ニ一致スルコトヲ証明スルノニ、帰納法ニヨツテヤルタメニ、低イ次数デハ成立ツト假定スル。

而シテ今 $\Omega \supset A \supset k$ (Aハ最大あーべる体) トスレバ假定ニヨリ $N^*_{\Omega/A} = N^*_{A_1/A}$ (但シ $A_1$ ハ $\Omega/A$ ノ最大あーべる体). 從ツテ $(A^* : N^*_{\Omega/A}) = (A_1^* : A^*)$. コノコトハ秋月氏, Ann. 112 (ノ終結定理ヲ用ヒナイ純代数的ナ部分) カラ $A^*$ mod $N^*_{\Omega/A}$ ノ如何ナル類モ $F_{\Omega/A}(*;(\alpha))$ ナル形ニカケル。ヨツテ上ノ定理1ニヨリ, 今度ハ $N^*_{\Omega/k} = N^*_{A/k}$ トナル。

サテ, 一般ノ場合ニ $\Omega/L$ ニコノがろあ体ニ関スルコトヲ適用スレバ容易ニ $L$ ノイカナル元モ $F_{\Omega/L}$ ノ形ニカケ定理1ガ適用出来ル。

然シ、モット代数的ニスヽメルダケ進ムコトトシヨウ。)

系　次々ニ剰余群ガ巡回群ナル *Hauptreihe* ヲモツ $\mathfrak{G}$ ヲ群トスルがろあ拡大 $\Omega/k$ ヲ考ヘル。而シテ $\Omega/k$ ノ最大あーべる体ヲ $L$ トシ、$\Omega/L$ ノ任意ノ中間体ノ上ノ $\Omega$ ノ分解体ニモツ多元環類ハ $k$ ノ上ノソレカラ係数拡大デ得ラレルトスル。然ラバ

$$N^*_{\Omega/k} = N^*_{L/k}$$ デアル。

(証明) 上ノ定理ヲ次々ニ適用スレバヨイ。

<u>補題4.</u>（秋月, l.c.）$L$ ヲガロア拡大 $\Omega/k$ ノガロア中間体トシ, $\mathfrak{h}$ ヲソレニ對應スル $\mathfrak{g}$ ノ部分群, $[\Omega : L] = h$ トスル。

然ラバ

$$\bigl((a), \Omega, \mathfrak{g}\bigr)^h \sim \bigl((b), L, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}\bigr)$$

但シ $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}P_0 + \mathfrak{h}R_0 + \cdots\cdots + \mathfrak{h}Q_0$,

而シテ $P_0$ ノ mod $\mathfrak{h}$ ノ klasse ヲ $\bar{P}$ デ表ハセバ

$$b_{\bar{P},\bar{Q}} = N_{\Omega/L}(a_{P_0,Q_0}) \prod_{H\in\mathfrak{h}} \frac{a_{P_0Q_0,H}}{a_{(PQ)_0,H}}$$

更ニコノ $(b)$ ニ対シテ

$$F_{L/k}(\bar{P}, (b)) = F_{\Omega/k}(P_0, (a))$$

<u>補題5.</u> 上ト同ジ假定ノ下ニ, $L^*$ ノ如何ナル元 $\delta$ モ

$$\delta = \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/L}(A_i\,;\,(\alpha)_i)$$

ト書ケルトスル（$(\alpha)_i$ ハ $\Omega/L$ ノ因子團; $A_i \in \mathfrak{h}$）. 而シテ $((\alpha)_i, \Omega, \mathfrak{h})$ ナル多元環類ハ $k$ ノ上ノ多元環類カラ係數拡大デ得ラレルトスル。

更ニ $\Omega/k$ ノアル因子團 $(b)$ ニ対シテ

$$\bigl((b), \Omega, \mathfrak{g}\bigr)^h \sim \bigl((\beta), L, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}\bigr)$$

トスル。シカラバ $\bar{P} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ニ対シテ

$C = F_{L/k}(\bar{P}\,;\,(\beta))$ ハ適當ナ $\Omega/k$ ノ因子團 $(\alpha)_i$ 及ビ $A_i \in \mathfrak{h}$ ニヨリ

$$/ \quad C \equiv F_{\Omega/k}(P_0, (b)) \prod F_{\Omega/k}(A_i, (a)_i) \mod N^*_{\Omega/k}$$

（但シ $P_0$ ハ $\overline{P}$ ノ代表元）

（証明）補題4ニヨリ

$$C = F_{L/k}(\overline{P}, (\beta)) \equiv F_{\Omega/k}(P_0, (b)) \mod N^*_{L/k}$$

即チ $d = C \; F_{\Omega/k}(P_0, (b))^{-1}$ トオケバ $d \in N^*_{L/k}$,

$d = N_{L/k}(\delta)$. 然ルニ

$$\delta = \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/L}(A_i ; (\alpha)_i)$$

ト書ケル。而シテ

$$((\alpha)_i, \mathfrak{D}, \mathfrak{h}) \sim ((a)_i, \mathfrak{D}, \mathfrak{g})_L$$

トナル。

補題2ニヨリ

$$d = N_{L/k}(\delta) = \prod_{i=1}^{n} N_{L/k}(F_{\Omega/L}(A_i ; (\alpha)_i))$$

$$\equiv \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/k}(A_i, (a)_i) \mod N^*_{\Omega/k}$$

故ニ

$$C = d \cdot F_{\Omega/k}(P_0, (b))$$

$$\equiv \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/k}(A_i ; (a)_i) \cdot F_{\Omega/k}(P_0, (b)) \mod N^*_{\Omega/k}$$

補題6. $\Omega/k$ ヲ可解拡大トスル。

$$k = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots\cdots \subset L_{n-1} \subset L_n = \Omega$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \mathfrak{g}_n = \{1\}$$

$\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i$ 巡回群, $S_i\,(\in \mathfrak{g})$ ヲソノ生成元ノ或ル代表元トスル。

而シテドノ $i$ ニツイテモ $L_i$ ヲ分解体ニモツ $k$ ノ上ノ多元環類ハ $\Omega$ ヲ分解体ニモツ適當ナ類ノ $(\Omega : L_i)$ 乘ニナッテヰルトスル。マタ $L_i$ ノ上ノ $\Omega$ ヲ分解体ニモツ類ハ $k$ ノ上ノソレカラ係数体拡大デ得ラレルトスル。

然ラバ $k$ ノ如何ナル元 $c\,(\neq 0)$ モ, 適當ナ $n$ 個ノ $\Omega/k$ ノ因子團 $(a)_i$ ヲトルコトニヨリ

$$c = \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega/k}(S_i\,;(a)_i) \quad \mathrm{mod}\, N^*_{\Omega/k}$$

トナル。

(証明) $n=1$, 即チ $\Omega = L_1$ ($k$ ノ上ニ巡回的) ノトキハ明ラカ。

何者, $c = F_{L_1/k}(S_1\,;(c))$ ダカラデアル。(但シ $(c)$ ハ巡回環 $(c, L_1, S_1)$ ノ因子團ヲ表ハス)。サテ帰納法デ証明スルタメ, $n-1$ ノ時ハ成立ツトスル。

$\Omega/L_1$ ニツナ考ヘルト定理ノ假設ニ相當スル條件ガミタサレテヰルコトハ直チニ知ラレル。ヨッテ如何ナル $\gamma_1 \in L_1^*$ ニ対シテモ $(n-1)$ 個ノ因子團 $(d)_i$ ($i=2,$

……, $n$) ヲトリ

$$\gamma_1 \equiv \prod_{i=2}^{n} F_{\Omega/L_1}(S_i\,;(\alpha)_i) \quad \mathrm{mod}\ N^*_{\Omega/L_1}$$

トナル。然ルニ $((\alpha)_i, \Omega, \mathfrak{g}_1) \sim ((a)_i, \Omega, \mathfrak{g})L_1$ ナル $(a)_i$ $(i=2,\dots,n)$ ト書ケル。

扨テ, $c \in k^*$ トスル. 上述ノ如ク $c = F_{L_1/k}(S_1\,;(c))$, 而シテ $(c_1, L_1, S_1)$ ハ或ル $((a)_1, \Omega, \mathfrak{g})$, $(\Omega : L_1)$ 乗ニ同値ニナル。ヨッテ前補題5ニヨリ

$$c \equiv F_{\Omega/k}(S_1\,;(a)_1)\prod_{i=2}^{n} F^{\cdot}_{\Omega/k}(S_i\,;(a)_i) \quad \mathrm{mod}\ N^*_{\Omega/k}$$

<u>定理2</u> 有限拡大 $K \supset L \supset k$ ニ於テ, $L$ ハ $K/k$ ノ最大あーべる体ヲ含ムトスル。

今, $K/k$ ニ属スルがろあ体ヲ $\Omega/k$ トスルトキ, $\Omega/L$ ハ可解拡大デアルトシ, 更ニ $\Omega/L$ ノ任意ノ中間体 $\Lambda$ ニ対シ $\Lambda$ ヲ分解体ニモツ $L$ ノ上ノ多元環類ハ $\Omega$ ヲ分解体ニモツ適当ナ多元環類ノ $(\Omega:\Lambda)$ 乗デアリ, マタ $\Lambda$ ノ上ノ $\Omega$ ヲ分解体ニモツ任意ノ多元環類ハ $k$ ノ上ノソレカラ係数拡大デ得ラレルトスル。

然ラバ

$$N^*_{K/k} = N^*_{L/k}$$

(証明) $\Omega/L$ ハ補題5ノ條件ヲミタスカラ, $L$ ノ任

意ノ元 $\gamma\,(\neq 0)$ ハ

$$\gamma \equiv \prod_{i} F_{\Omega/L}(A_i\,;\,(\alpha)_i) \mod N^{*}_{\Omega/L}$$

ヨッテ定理ノニヨリ（ソコノ條件ニミタサレテキルカラ）

$$N^{*}_{K/k} = N^{*}_{L/k}$$

—— 以上 ——